

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



UNIVERSITÉ HASSIBA BENBOUALI DE CHLEF
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département d'Informatique

Polycopié de cours

Logique Mathématique

DESTINÉ À LA 2^{eme} ANNÉE
LICENCE INFORMATIQUE

RÉDIGÉ PAR :DR : MEDJAHED CHAHREDDINE

Année Universitaire :2023-2024

Préface	3
1 Introduction	4
1.1 Objets de la logique	4
1.2 Syntaxe et sémantique	4
1.3 Vocabulaire usuel	6
1.3.1 Axiome	6
1.3.2 Proposition (ou assertion ou affirmation)	6
1.3.3 Théorème	6
1.3.4 Corollaire	6
1.3.5 Lemme	7
1.3.6 Définition	7
1.4 Raisonnement	7
1.4.1 Raisonnement direct	7
1.4.2 Cas par cas	8
1.4.3 Contraposée	8
1.4.4 Absurde	9
1.4.5 Contre-exemple	9
1.4.6 Récurrence	9
2 Logique Des Propositions	11
2.1 Introduction	11
2.2 Proposition	11
2.3 Syntaxe	12
2.4 Priorité des connecteurs	13
2.5 Structure d'une formule	13
2.6 Substitutions	14
2.7 Sémantique	15
2.8 Valuation	15
2.9 Valeur d'une formule	15
2.10 Tableau de vérité	16
2.10.1 Négation « non » ou « $\neg$ »	16
2.10.2 Conjonction « et » ou « $\wedge$ »	16

2.10.3	Disjonction « ou » ou « $\vee$ »	17
2.10.4	Implication « $\rightarrow$ »	17
2.10.5	Équivalence « $\leftrightarrow$ »	18
2.11	Tautologie et antilogie	19
2.12	Satisfaisabilité	19
2.13	Equivalence	19
2.13.1	Formules équivalentes	20
2.14	Système complet	21
2.15	Connecteur de Sheffer	21
2.16	Formes normales conjonctives et disjonctives	22
2.16.1	Formes normales disjonctives	22
2.16.2	Formes normales conjonctives	22
2.16.3	Méthodes de transformation	23
2.17	Conséquence logique	23
2.18	Raisonnement déductif en logique propositionnelle	27
2.18.1	Définition d'un système formel	27
2.18.2	Le théorème de complétude pour la logique booléenne	28
2.18.3	Méthode de résolution	29
3	Logique Des Prédicats	35
3.1	Introduction	35
3.2	Structure	35
3.3	Terme	35
3.4	Formule atomique	36
3.5	Formules bien formées	36
3.6	Variables libres et de variables liées	36
3.7	Formules équivalentes	37
3.8	Sémantique de la logique des prédicats du premier ordre	37
3.9	Interprétation de formules d'un langage du premier ordre	38
3.9.1	Interprétation d'un terme	38
3.9.2	Interprétation d'une formule	39
3.9.3	Satisfiabilité d'une formule	39
3.9.4	Modèle d'une formule	41
3.9.5	Validité d'une formule	42
3.9.6	Conséquence logique	42
A	Fiche TD N°1	44
B	Fiche TD N°2	46
C	Fiche TD N°3	49
D	Fiche TD N°4	51

La logique mathématique, ou logique formelle, est une discipline des mathématiques qui définit et étudie les représentations formelles du langage mathématique. Les objets fondamentaux de la logique mathématiques sont les formules modélisant les énoncés mathématiques, les dérivations modélisant les raisonnements mathématiques et les sémantiques établissant les liens entre ces modèles et les objets qu'ils sont censés représenter.

Au cours du XXe siècle, la logique mathématique s'est ramifiée en de nombreux sous-domaines :

- la théorie des ensembles.
- la théorie de la démonstration .
- la théorie des modèles.
- la théorie de la calculabilité.

Cette classification en quatre grands axes, généralement admise, est celle proposée par Jon Barwise éditeur de l'ouvrage collectif "Handbook of Mathematical Logic".

En tant que branche des mathématiques, la logique a joué un rôle décisif dans le développement des mathématiques modernes, caractérisées par une rigueur inconnue aux siècles précédents. Cette rigueur se manifeste dans l'utilisation de la méthode axiomatique généralisée à presque tous les domaines des mathématiques contemporaines. C'est grâce à la méthode axiomatique et à des notions rigoureuses telles que “preuve” ou “déductibilité” que les études métamathématiques sont devenues possibles (le développement à l'aide de la logique, d'une théorie des systèmes mathématiques et de leurs propriétés formelles). De pair avec la théorie des ensembles, à laquelle elle est étroitement liée, la logique forme ce qu'on appelle “les fondements des mathématiques”. Elle fait aujourd'hui partie de toute formation mathématique.

La logique n'est pas seulement une branche des mathématiques et de la philosophie, mais elle forme une base pour ces disciplines. Les mathématiciens de toutes les branches cherchent à prouver des théorèmes et leurs preuves doivent satisfaire aux conditions logiques communément acceptées. La philosophie est la science des arguments et les arguments en philosophie sont (ou, au moins, devraient être) évalués et construits à l'aide de la logique. Cette influence de la logique sur la manière dont les problèmes philosophiques sont posés et résolus est particulièrement manifeste en philosophie du langage. C'est à l'influence de la philosophie du langage sur la philosophie contemporaine que la logique doit son statut crucial.

Ce cours a pour objectifs de donner aux étudiants des notions de base de la logique formelle.

L'utilisation de la logique mathématique n'est pas limitée dans le domaine théorique pur, mais elle a fortement contribué à la naissance des premiers ordinateurs. La bina-rité de la valeur de vérité est la base de tous les circuits électronique qui composent l'ordinateur. Par la suite les bases de la logique mathématique ont beaucoup contribué dans les applications de l'intelligence artificielle.

1.1 Objets de la logique

La logique mathématique, ou logique formelle, est une discipline des mathéma-tiques qui définit et étudie les représentations formelles du langage mathématique. Les objets fondamentaux de la logique mathématiques sont les formules modélisant les énoncés mathématiques, les dérivations modélisant les raisonnements mathéma-tiques et les sémantiques établissant les liens entre ces modèles et les objets qu'ils sont censés représenter.

1.2 Syntaxe et sémantique

On a besoin en logique de distinguer entre le mot et ce qu'il désigne. Ainsi pour prendre un exemple dans la langue courante, quand on dit que le chien a 4 pattes, le mot chien fait référence à un quelque chose d'extérieur, ici le monde réel, au sens du mot chien, c'est la *sémantique*. C'est tout à fait différent quand l'on dit que "chien" a 5 lettres : on parle du mot "chien", c'est de la *syntaxe*.

De la même façon on peut dire que $2x - 5$ est construit comme la différence du produit de 2 par la variable x et de 5, c'est plutôt une remarque d'ordre syntaxique. On peut dire que $2x - 5$ désigne un réel dont la valeur dépend de celle du réel x , c'est une remarque d'ordre sémantique.

Par exemple les expressions '2', '1+1' et '2+0' sont syntaxiquement différentes mais désignent le même objet, l'entier '2'.

La syntaxe d'un langage s'occupe de son lexique, de ses règles de formation. La sémantique d'un langage s'occupe de lui donner un sens, d'interpréter les expressions du langage dans un monde a priori extérieur au langage.

Quand des mots, des assemblages de signes, ne sont pas syntaxiquement corrects, ont dit qu'ils n'ont pas de sens. Par exemple '1+', '3-2)', 'x=' ne sont pas corrects syntaxiquement. C'est tout à fait différent de dire que ' $1 + 1 = 1$ ' est faux (pour les entiers). En effet l'expression ' $1 + 1 = 1$ ' est syntaxiquement correcte et a un sens : elle est fausse, c'est de la sémantique.

La formalisation de la syntaxe du langage doit permettre de décrire les expressions qui ont un sens sans faire référence à ce sens. C'est très difficile pour un langage usuel, mais tout à fait possible pour le langage artificiel que nous allons étudier.

Il n'est bien-sûr pas question de chercher une signification a un assemblage de signes qui n'est pas syntaxiquement correct, mais toute expression syntaxiquement correcte doit avoir un sens. Une expression syntaxiquement correcte est construite à partir de composants élémentaires des symboles comme '1', 'x', '+', '='. L'interprétation d'une expression sera obtenue à partir de l'interprétation de ses composants élémentaires.

Les choses ne sont parfois pas si simples. Ainsi l'expression $\sqrt{10 - x}$ semble avoir un sens, elle ne désigne pourtant aucun nombre (aucun réel en tout cas) si x est remplacé par un réel strictement supérieur à 10. Des expressions comme 'le plus grand nombre premier', 'l'entier naturel strictement compris entre 0 et 1' ne désignent aucun entier. Ces expressions demandent qu'une certaine condition soit vraie pour pouvoir désigner vraiment un objet. On sort donc a priori du cadre de la syntaxe.

1.3 Vocabulaire usuel

1.3.1 Axiome

Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer. Ainsi, par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes («les cinq postulats d'Euclide»), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : « par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».

Un autre exemple d'axiomes est fourni par les (cinq) axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels.

Le cinquième axiome affirme que : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur de n est $n + 1$), alors $P = \mathbb{N}$ ». Cet axiome est appelé « l'axiome d'induction » ou encore « l'axiome de récurrence ». Ces énoncés ont en commun d'être « évidents » pour tout le monde.

1.3.2 Proposition (ou assertion ou affirmation)

Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » et « tout carré de réel est un réel positif » sont deux propositions. Il est facile de démontrer que la première est fausse et la deuxième est vraie. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

1.3.3 Théorème

Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas démontrée comme telle). Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grands d'entre eux (théorème de Pythagore, . . .).

1.3.4 Corollaire

Un corollaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème. Par exemple, dans le chapitre « continuité », le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles, est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un corollaire de ce théorème affirme alors que si une fonction définie

et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

1.3.5 Lemme

Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

1.3.6 Définition

Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet. On doit avoir conscience que le mot « axiome » est quelque fois synonyme de « définition ». Par exemple, quand vous lirez « définition d'un espace vectoriel », vous pourrez tout autant lire « axiomes de la structure d'espace vectoriel » et vice-versa.

1.4 Raisonnement

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

1.4.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration

Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$.

Maintenant :

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a, b \in \mathbb{Q}$.

1.4.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A . C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier Cas : $x \geq 1$. Alors $|x - 1| = x - 1$.

Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x - 1|$.

$$x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - x + 1 - (x - 1).$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

$$= (x - 1)^2 + 1 \geq 0.$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$

Deuxième Cas : $x < 1$. Alors $|x - 1| = -(x - 1)$.

Nous obtenons : $x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - x + 1 + (x - 1)$

$$= x^2 \geq 0.$$

Et donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

Conclusion : Dans tous les cas : $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

1.4.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \rightarrow Q) \text{ est équivalente à } \neg Q \rightarrow \neg P$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $(P \rightarrow Q)$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.

Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.4.4 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer « $P \rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \rightarrow Q$ » est vraie.

Exemple

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2 = b - a$.

Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$

Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$.

La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

1.4.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E : P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de « $\forall x \in E : P(x)$ » est « $\exists x \in E : \neg P(x)$ »). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « $\forall x \in E : P(x)$ ».

Exemple

Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

(Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$. Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

Démonstration

Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.4.6 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de

l'initialisation on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'hérédité, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in N$.

Exemple

Montrer que pour tout $n \in N$, $2^n > n$.

Démonstration

Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation

Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 \geq 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité

. Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n$$

$$> n + 2 \quad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n$$

$$> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarques

– La rédaction d'une récurrence est assez rigide. Respectez scrupuleusement la rédaction proposée : donnez un nom à l'assertion que vous souhaitez montrer (ici $P(n)$), respectez les trois étapes (même si souvent l'étape d'initialisation est très facile). En particulier méditez et conservez la première ligne de l'hérédité « Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. »

Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0 .

Le principe de récurrence est basé sur la construction de N . En effet un des axiomes pour définir N est le suivant : « Soit A une partie de N qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $(n+1) \in A$. Alors $A = N$ »

2.1 Introduction

La logique propositionnelle consiste à raisonner avec des propositions. Ce sont des phrases construites, à l'aide de connecteurs logiques propositionnels, à partir d'énoncés primitifs appelés propositions atomiques, qui peuvent attribuer une valeur de vérité : vrai ou faux. Ces valeurs de vérité se propagent sur toutes les propositions à travers des tables de vérité pour les connecteurs propositionnels.

Dans ce chapitre, nous introduisons le calcul propositionnel. Cette logique permet d'étudier les relations entre des énoncés, que l'on va appeler propositions ou encore des formules. Ces relations peuvent être exprimées par l'intermédiaire de connecteurs logiques qui permettent, par composition, de construire des formules syntaxiquement correctes. On trouve principalement : la conjonction, la disjonction (inclusive), l'implication, l'équivalence et la négation.

2.2 Proposition

Une déclaration ou une proposition est une phrase déclarative qui est soit vraie soit fausse, mais pas à la fois vraie et fausse [1].

Exemple

- La terre est sphérique. Vrai
- $1+3=7$ Faux
- Alger est la capitale de l'Algérie. Vrai

La phrase déclarative « Cette phrase est fausse » est une phrase intéressante. Si nous

attribuons la valeur de vérité « vrai » ou la valeur de vérité « faux » à cette phrase, nous avons une contradiction. La phrase n'est donc pas un énoncé. Parce que la phrase « Cette phrase est fausse » n'est ni « vraie » ni « fausse », on l'appelle un *paradoxe*. Un *paradoxe* est une phrase informative Mais elle n'est ni vraie ni fausse.

Exemple

- Ranger vos affaires.
- Quel âge avez-vous ?
- Salut tous le monde.
- Cette phrase est fausse.

2.3 Syntaxe

Une expression bien formée ou proposition est une expression qui a du sens et qui peut être vraie ou fausse.

La logique est basée sur le principe de non-contradiction. Ce principe dit qu'une expression bien formée ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

Le langage du calcul propositionnel est formé de :

- Symboles propositionnels $\text{Prop} = \{P, Q, R, \dots\}$;
- Connecteurs logiques $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
- Symboles auxiliaires : parenthèses $()$.

Symbole	Appellation	Prononciation
$\neg$	Négation	Non P
$\wedge$	Conjonction	P et Q
$\vee$	Disjonction	P ou Q
$\rightarrow$	Implication	P implique Q
$\leftrightarrow$	Equivalence	P est équivalent à Q

Remarque

Dans la littérature logique on utilise plusieurs synonymes pour symbole propositionnel ; ainsi variable propositionnelle, proposition atomique, formule atomique, ou encore atome sont tous des synonymes de symbole propositionnel.

L'ensemble des formules du calcul propositionnel (Fcp) est le plus petit ensemble tel que :

- Tout symbole propositionnel est une formule.
- Si P est une formule alors $\neg P$ est une formule.

- Si P, Q sont des formules, alors $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ et $P \leftrightarrow Q$ sont des formules.

Les symboles auxiliaires ne sont utilisés que pour lever les ambiguïtés possibles : par exemple, la formule $P \vee Q \wedge R$ est ambiguë, car elle peut se lire de deux façons différentes, $((P \vee Q) \wedge R)$ ou bien $(P \vee (Q \wedge R))$.

Exemple

$P, Q, P \wedge Q, (\neg P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow \neg(Q \vee R))$, sont des formules bien formées.

2.4 Priorité des connecteurs

La connaissance des priorités permet la bonne lecture de la formule et évite les parenthèses supplémentaires.

La priorité des connecteurs de la plus forte à la plus faible : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Lorsque le même connecteur se répète dans la même formule, la priorité est donné à celui le plus à gauche.

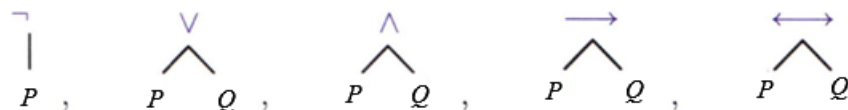
Lorsqu'un connecteur est mis entre parenthèse alors il est prioritaire.

Exemple

- $(P \wedge \neg Q)$ 1.Négation 2.Conjonction.
- $\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$ 1.Négation 2.Conjonction 3.Implication.
- $(P \vee Q) \wedge R$ 1.Disjonction 2.Conjonction.

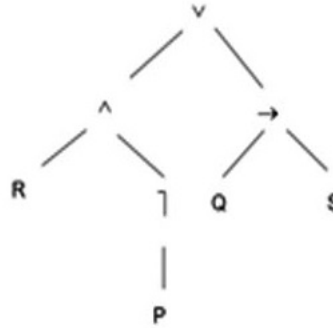
2.5 Structure d'une formule

Les formules du Calcul Propositionnel sont des arbres dont toutes les feuilles sont des variables propositionnelles et dont tous les autres nœuds sont des connecteurs logiques. Chaque branchement de l'arbre est soit unaire, soit binaire, en fonction précisément de l'arité du connecteur en jeu [2].

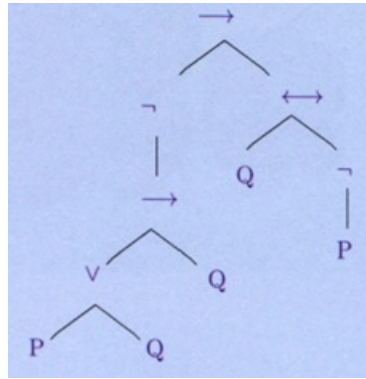


Exemple 01

$$R \wedge \neg P \vee (Q \rightarrow S)$$

**Exemple 02**

$$(\neg((P \vee Q) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \leftrightarrow \neg P)).$$



2.6 Substitutions

Il faut définir ce que signifie remplacer P par G dans une formule F , noté $F(G/P)$. La substitution de P par G dans F est définie par induction sur la formule F :

- Si F est la variable propositionnelle P , alors $F(G/P)$ est la formule G .
- Si F est la variable propositionnelle Q , avec $Q \neq P$, alors $F(G/P)$ est la formule F .
- Si F est de la forme $\neg H$, alors $F(G/P)$ est de la formule $\neg H(G/P)$.
- Si F est de la forme $(F_1 \wedge F_2)$, alors $F(G/P)$ est la formule :
 $(F_1(G/P)) \wedge (F_2(G/P))$.
- Si F est de la forme $(F_1 \vee F_2)$, alors $F(G/P)$ est la formule :
 $(F_1(G/P)) \vee (F_2(G/P))$.
- Si F est de la forme $(F_1 \rightarrow F_2)$, alors $F(G/P)$ est la formule :
 $(F_1(G/P)) \rightarrow (F_2(G/P))$.

- Si F est de la forme $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, alors $F(G/P)$ est la formule : $(F_1(G/P)) \leftrightarrow (F_2(G/P))$.

2.7 Sémantique

S'intéresser à la sémantique de la logique propositionnelle, c'est déterminer la valeur de vérité d'un énoncé, c'est-à-dire d'une formule. On parle de l'interprétation d'une formule : il s'agit plus concrètement d'affecter une valeur vraie ou fausse à chacune des variables propositionnelles qui la compose. Pour une formule à n variables, il y a 2^n mondes possibles.

La sémantique du langage propositionnelle s'intéresse à donner une valeur de vérité à chaque formule du langage.

On peut définir une fonction $v : EF \rightarrow \{V, F\}$, tel que EF est l'ensemble des formules.

2.8 Valuation

Une valuation est une application de Prop dans $\{0, 1\}$. La valeur 0 désigne le 'faux' et la valeur 1 désigne le 'vrai'.

2.9 Valeur d'une formule

En logique propositionnelle classique, une formule propositionnelle, ou expression propositionnelle, est une formule bien formée qui possède une valeur de vérité. Si les valeurs de toutes les variables propositionnelles dans une formule propositionnelle sont données, une unique valeur de vérité peut être déterminée.

- $v(\neg P) = 1$ ssi $v(P) = 0$.
- $v(P \wedge Q) = 1$ ssi $v(P) = 1$ et $v(Q) = 1$.
- $v(P \vee Q) = 1$ ssi $v(P) = 1$ ou $v(Q) = 1$.
- $v(P \rightarrow Q) = 1$ ssi $v(P) = 1$ et $v(Q) = 1$.
- $v(P \leftrightarrow Q) = 1$ ssi $v(P) = v(Q)$.

Ou bien

- $v(\neg P) = 1 - v(P)$.
- $v(P \wedge Q) = \min(v(P), v(Q))$.
- $v(P \vee Q) = \max(v(P), v(Q))$.

$$\text{--- } v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q).$$

2.10 Tableau de vérité

Ils existent cinq (5) connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique. Soient P et Q deux assertions :

2.10.1 Négation « non » ou « $\neg$ »

Nous appellerons la négation de P , l'assertion (non P)(not P) et qui sera notée sous forme formalisée : $\neg P$. [3]

P	$\neg P$
0	1
1	0

TABLE 2.1 – Tableau de vérité de la négation.

Exemple

Si P est la proposition $x = 0$, $\neg P$ est la proposition $x \neq 0$.

2.10.2 Conjonction « et » ou « $\wedge$ »

Nous appellerons conjonction de P et Q , l'assertion (P et Q)(P and Q) et qui sera notée $P \wedge Q$.

Exemple

P : « La terre est ronde » (vraie) et Q : « Le ciel est bleu » (vraie).

P et Q ou $P \wedge Q$ se lit donc « La terre est ronde **ET** le ciel est bleu » (vraie).

Nous dirons que l'assertion $P \wedge Q$ est fausse lorsque l'une au moins des deux assertions est fausse. Le résultat de la conjonction est démontré par le tableau de vérité 2.2.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABLE 2.2 – Tableau de vérité de la conjonction.

2.10.3 Disjonction « ou » ou « $\vee$ »

Nous appellerons disjonction de P et Q , l'assertion (P ou Q) et qui sera notée $P \vee Q$.

En mathématique, le « ou » est non-exclusif, c'est à dire qu'il comprend la possibilité que les deux propositions soient vraies. Ainsi la proposition « $xy = 0$ » équivaut à la proposition « $x = 0$ ou $y = 0$ », elle est vraie quand l'un des deux nombres est nul, elle est aussi vraie quand les deux sont nuls.

Le résultat de la disjonction est démontré par le tableau de vérité 2.3.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TABLE 2.3 – Tableau de vérité de la disjonction.

2.10.4 Implication « $\rightarrow$ »

La proposition notée $P \rightarrow Q$ correspond à la proposition (non P ou Q) ($\neg P \vee Q$). P s'appelle alors l'hypothèse et Q la conclusion. $P \rightarrow Q$ est une formule qui se nomme implication et que nous pouvons lire de différentes façons [2]

- Si P alors Q .
- Pour que P il faut Q .
- Pour que Q il suffit P .
- P est une condition suffisante pour Q .
- Q est une condition nécessaire pour P .

Le résultat de l'implication est démontré par le tableau de vérité 2.4.

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

TABLE 2.4 – Tableau de vérité de l'implication.

L'assertion est vraie dès lors que P est fausse (quelle que soit la vérité de Q). Si P est vraie et ($P \rightarrow Q$) vraie alors Q est vraie. De plus l'implication ($Q \rightarrow P$) s'appelle

la réciproque de l'implication $(P \rightarrow Q)$.

Exemple

Soit $P :=$ vous avez une meilleure idée. et $Q :=$ je suis toutes ouïes.

Chacun des énoncés suivants se laisse traduire par $P \rightarrow Q$.

- **Si** vous avez une meilleure idée, **alors** je suis toutes ouïes.
- **Si** vous avez une meilleure idée, je suis toutes ouïes.
- **Dans la mesure où** vous avez une meilleure idée, je suis toutes ouïes.
- Vous avez une meilleure idée, **par conséquent** je suis toutes ouïes.
- **Si** vous avez une meilleure idée, **il s'en suit que** je suis toutes ouïes.

2.10.5 Équivalence « $\leftrightarrow$ »

Nous dirons que deux assertions sont logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité et seront notées $P \leftrightarrow Q$. En d'autres termes $P \leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou si toutes les deux sont fausses. La proposition $P \leftrightarrow Q$ correspond à la proposition $(P \rightarrow Q)$ et $Q \rightarrow P$. Nous pourrions l'exprimer comme suit :

- P est équivalent à Q .
- Pour P , il faut et il suffit Q .
- P est une condition nécessaire et suffisante pour Q .
- P si et seulement si Q .

Le résultat de l'équivalence est démontré par le tableau de vérité 2.5.

Exemple

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TABLE 2.5 – Tableau de vérité de l'équivalence.

Soit $P :=$ Amal est enceinte. et $Q :=$ le test de grossesse est positif.

Chacun des énoncés suivants se laisse traduire par $P \leftrightarrow Q$.

- Amal est enceinte **si et seulement si** le test de grossesse est positif.
- Amal est enceinte **exactement lorsque** le test de grossesse est positif.
- Amal est enceinte **précisément si** le test de grossesse est positif.
- Amal est enceinte **dans la mesure exacte où** le test de grossesse est positif.
- Amal est enceinte **dans le cas uniquement où** le test de grossesse est positif.

2.11 Tautologie et antilogie

Une formule propositionnelle F est une tautologie si elle obtient une valeur de vérité vrai pour toute affectation de valeurs de vérité aux variables apparaissant dans F .

L'affirmation selon laquelle F est une tautologie est notée : $\models F$

Les tautologies sont aussi appelées formules (logiquement) valides.

Voici quelques tautologies simples qui représentent certaines caractéristiques importantes de la logique propositionnelle :

- $\neg(P \wedge \neg P)$
- $(P \wedge Q) \rightarrow P$
- $((P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
- $P \rightarrow (P \vee Q)$

Le concept opposé d'une tautologie est une formule contradictoire (**antilogie**), c'est-à-dire une formule qui prend toujours une valeur de vérité fausse. Par exemple, $(P \wedge \neg P)$ est une formule contradictoire.

Une formule F est une tautologie précisément lorsque sa négation $\neg F$ est une formule contradictoire, et F est contradictoire précisément lorsque sa négation $\neg F$ est une tautologie [4].

2.12 Satisfaisabilité

Une formule F est **satisfaisable** (ou **consistante**, ou **cohérente**) si elle admet un modèle (s'il existe une valuation v telle que $v(F) = 1$).

Exemple

La formule $P \wedge \neg Q \wedge R$ est satisfiable avec les valeurs de vérité $v(P) = 1, v(Q) = 0, v(R) = 1$.

2.13 Equivalence

Deux formules F et G sont dites équivalentes si pour toute valuation v , $v(F) = v(G)$. On écrit dans ce cas $F \equiv G$.

Exemple

Les formules P et $\neg\neg P$ sont équivalentes. **Remarque**

Il est important de bien comprendre que $\equiv$ est un symbole que l'on utilise pour écrire une relation entre deux formules, mais que $F \equiv G$ n'est pas une formule propositionnelle.

Exercice

Montrer que la formule $F \rightarrow F$ est une tautologie ?

Exercice

Montrer que pour toute formule F on a les équivalences suivantes ?

$$F \vee F \equiv F$$

$$F \wedge F \equiv F$$

2.13.1 Formules équivalentes

Un type d'étape important utilisé dans un argument mathématique est le remplacement d'une formule par une autre ayant la même valeur de vérité. Pour cette raison, les méthodes qui produisent des formules ayant la même valeur de vérité qu'une formule donnée sont largement utilisées dans la construction d'arguments mathématiques.[5]

Soit F , G et H trois formules bien formées.

Nom	a
Implication	$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ $\neg(F \rightarrow G) \equiv F \wedge \neg G$ $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$
Idempotence	$F \wedge F \equiv F$ $F \vee F \equiv F$
Identité	$F \wedge 1 = F$ $F \vee 0 = F$
Commutativité	$F \wedge G \equiv G \wedge F$ $F \vee G \equiv G \vee F$
Associativité	$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$ $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$
Distributivité	$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
Domination	$F \vee 1 = 1$ $F \wedge 0 = 0$
Complémentarité	$F \wedge \neg F \equiv 0$ $F \vee \neg F \equiv 1$
Involution	$\neg \neg F \equiv F$
De Morgan	$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
Absorption	$F \wedge (\neg F \vee G) \equiv F \wedge G$ $F \vee (\neg F \wedge G) \equiv F \vee G$ $F \vee (F \wedge G) \equiv F$ $F \wedge (F \vee G) \equiv F$

TABLE 2.6 – Formules équivalentes

2.14 Système complet

Ce tableau regroupe toutes les tables de vérité possibles des fonctions à 2 variables (propositions).

Par exemple, on peut trouver dans ce tableau les formules suivantes :

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$f_2(P, Q) = P \wedge Q \quad , \quad f_5(P, Q) = P \rightarrow Q$$

Définition

Soit S un sous ensemble de connecteurs logiques. On dit que S est un système complet si pour toute formule α , on peut trouver une formule α' ne contenant que les éléments de S , tel que $\alpha \equiv \alpha'$.

Exemple

L'ensemble $\{\neg, \wedge\}$ est un système complet.

Preuve

α	α'
$P \vee Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$P \rightarrow Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$

2.15 Connecteur de Sheffer

Henry M. Sheffer, a pensé à un connecteur qui forme tout seul un système complet. On cherche dans le tableau précédent la fonction qui peut représenter le connecteur Sheffer.

Par élimination :

-La valeur de la fonction qui représente le connecteur de Sheffer ne doit pas être V quand les valeurs de P et Q sont toutes les deux V, car si c'était le cas, on ne pourrait jamais arriver à la valeur F, en appliquant plusieurs fois cette fonction. Autrement dit, cette fonction ne représente pas toutes les formules.

-De la même manière, la valeur de la fonction qui représente le connecteur de Sheffer ne doit pas être F quand les valeurs de P et Q sont toutes les deux F.

En éliminant toutes les fonctions répondant à cette propriété, il nous restent les 4

fonctions : f_9 , f_{11}, f_{13}, f_{15} , et comme f_{11} , f_{13} sont exactement $\neg Q$ et $\neg P$ qui ne peuvent jamais former un système complet puisque le $\neg$ s'applique que sur une seule variable, il nous reste donc les deux fonctions f_9 , f_{15} qui peuvent représenter le connecteur de Sheffer. Ce sont exactement le « non et » (NAND) et le « non ou » (NOR).

- Nand : $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$
- Nor : $P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$

Pour montrer que ces deux symboles représentent bien les connecteurs de Sheffer, il suffit de pouvoir écrire tous les autres connecteurs rien qu'avec ces connecteurs ($\uparrow, \downarrow$)

2.16 Formes normales conjonctives et disjonctives

On cherche souvent à ramener les formules sous une forme équivalente la plus simple possible.

Littéral

Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.

monôme

Un monôme est une conjonction de littéraux.

Clause

Une clause est une disjonction de littéraux.

2.16.1 Formes normales disjonctives

Une forme normale disjonctive est une disjonction $F_1 \vee F_2 \vee \dots F_k$ de k formules, $k \geq 1$ où chaque formule F_i , $1 \leq i \leq k$ est une conjonction $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots G_\ell$ de ℓ littéraux.

Exemple

Les formules suivantes sont des formes normales disjonctives :

- $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
- $((P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg P))$
- $(P \wedge \neg Q)$

2.16.2 Formes normales conjonctives

Une forme normale conjonctive est une conjonction $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots F_k$ de k formules, $k \geq 1$ où chaque formule F_i , $1 \leq i \leq k$ est une disjonction $G_1 \vee G_2 \vee \dots G_\ell$ de ℓ littéraux.

Exemple

Les formules suivantes sont des formes normales conjonctives :

- $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $(\neg P \vee Q) \wedge \neg R$

Théorème

Toute formule sur un nombre fini de variables propositionnelles est équivalente à une formule en forme normale conjonctive.

Toute formule sur un nombre fini de variables propositionnelles est équivalente à une formule en forme normale disjonctive.

2.16.3 Méthodes de transformation

La méthode consiste à transformer la formule par équivalences successives à l'aide des règles suivantes appliquées dans cet ordre :

1. Élimination des connecteurs $\leftrightarrow$ par :

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$
2. Élimination des connecteurs $\rightarrow$ par :

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$$
3. Entrée des négations le plus à l'intérieur possible :

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$
4. Distributivité de $\wedge$ et $\vee$ l'un par rapport à l'autre :

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Exemple

Mettre la formule $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee (R \rightarrow Q)$ sous forme normal disjonctive.

On utilise les équivalences successives :

$$\neg(\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \vee (\neg R \vee Q)$$

$$(P \wedge \neg(\neg Q \vee R)) \vee (\neg R \vee Q)$$

$$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg R \vee Q)$$

Qui est une forme normale disjonctive.

2.17 Conséquence logique

On dit que la formule B est conséquence logique de A noté $A \models B$ si tout modèle satisfaisant A satisfaisant B [2].

En généralisant, on dit que La formule β est une conséquence logique de l'Ensemble

de formules $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ (on note $\Gamma \models \beta$) si la valeur de vérité de β est vraie dans toutes les lignes où les valeurs de vérité des formules de Γ sont toutes vraies.

Exemple

$\{P \rightarrow Q, \neg Q\} \models \neg P$ Nous pouvons déduire de la définition qui précède qu'une for-

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

TABLE 2.7 – Tableau de vérité

mule β n'est pas conséquence logique d'un ensemble de formule $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, si étant donné le tableau de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et β , il existe au moins une ligne où les valeurs de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont toutes vraies et la valeur de vérité de β est fausse. Ainsi, $\neg Q$ n'est pas conséquence logique de $\{P \rightarrow Q, \neg P\}$ (ligne 4 du tableau 2.6); sur cette ligne les valeurs de vérité de $P \rightarrow Q$ et $\neg P$ sont toutes les deux vraies et la valeur de vérité de $\neg Q$ est fausse.

Nous écrirons $\Gamma \not\models \beta$ pour dire que la formule β n'est pas conséquence logique de Γ .

S'il n'existe aucune ligne du tableau de vérité où les formules $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de vérité soient simultanément à vraies, nous pouvons dire de n'importe quelle formule du langage qu'elle est conséquence logique de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Proposition

La relation « conséquence logique » est transitive.

Si $\Gamma \models \beta$ et $\beta \models \gamma$ alors $\Gamma \models \gamma$

Théorème

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$ si et seulement si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$

La partie gauche du théorème indique que β est conséquence logique de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; la partie droite indique que $\alpha_n \rightarrow \beta$ est conséquence logique de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$.

Démonstration(par l'absurde)

$\Rightarrow$) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$ alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$

On suppose que la partie droite est fausse ($\alpha_n \rightarrow \beta$ n'est pas conséquence logique de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$). Dans ce cas, la valeur de vérité de $\alpha_n \rightarrow \beta$ serait fausse sur au moins l'une des ligne du tableau de vérité où les valeurs de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sont simultanément vraies. Sur la même ligne, la valeur de vérité de α_n est donc vraie et

celle de β fausse. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (partie gauche).

$\leftarrow$) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \models \alpha_n \rightarrow \beta$ alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \beta$

On suppose qu'il existe au moins une ligne du tableau de vérité où la valeur de vérité de β est fausse et où celle de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont toutes vraies ; sur cette même ligne, la valeur de vérité de $\alpha_n \rightarrow \beta$ est donc fausse (car α_n est à vraie et β à fausse). Ce qui est contradiction avec l'hypothèse.

Cas particulier)

$n = 1$

$\alpha \models \beta$ si et seulement si $\models \alpha \rightarrow \beta$

Théorème

| Si $\Gamma \models \alpha$ et $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ alors $\Gamma \models \beta$.

Démonstration

Supposons que β ne soit pas conséquence logique de Γ . Étant donné le tableau de vérité des formules de Γ, α, β , il existe alors au moins une ligne où les valeurs de vérité des formules de Γ sont simultanément à vraies et où la valeur de β est fausse. $\alpha \rightarrow \beta$ étant conséquence logique de Γ , la valeur de vérité de α est fausse sur la même ligne. Ce qui est en contradiction avec la première hypothèse.

Cas particulier

Si $\models \alpha$ et $\models \alpha \rightarrow \beta$ alors $\models \beta$.

Théorème

| Si $\Gamma \models \beta$ et $\Gamma \models \neg\beta$ alors Γ est non satisfiable.

Démonstration

Supposons que $\Gamma \models \beta$ (hyp 1) et $\Gamma \models \neg\beta$ (hyp 2) et que Γ soit satisfiable.

Étant donné le tableau de vérité des formules $\Gamma, \beta, \neg\beta$, il existerait alors au moins une ligne où les valeurs de vérité des formules de Γ sont simultanément à vraies. Sur la même ligne la valeur de vérité de β est vraie (hyp 1) et celle de $\neg\beta$ est également vraie (hyp 2). Ce qui est impossible. Γ ne peut donc être satisfiable.

Théorème

| $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \models \beta$ si et seulement si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \neg\beta\}$ est non satisfiable.

Démonstration

$\rightarrow$) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \models \beta$ alors $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \neg\beta\}$ est non satisfiable.

Supposons que l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \neg\beta\}$ soit satisfiable. Il existerait alors au moins une ligne du tableau de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ et $\neg\beta$ où les valeurs de vérité de toutes ces formules seraient vraies. Sur la même ligne la valeur de vérité de β serait fausse. Ce qui est en contradiction avec la première hypothèse.

$\leftarrow$) Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \neg\beta\}$ est non satisfiable alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \models \beta$.

Supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \not\models \beta$. Dans le tableau de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ et β il existerait alors au moins une ligne où les valeurs de vérité de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ seraient toutes vraies et où la valeur de vérité de β serait fausse. Sur la même ligne, la valeur de vérité de $\neg\beta$ serait vraie. L'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \neg\beta\}$ serait dans ce cas satisfiable.

Proposition

Si $\Gamma \models \beta_1$ et si $\Gamma, \beta_1 \models \beta_2$ et ... et $\Gamma, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \models \delta$ alors $\Gamma \models \delta$

Pour $n = 1$

Si $\Gamma \models \beta$ et si $\Gamma, \beta \models \delta$ alors $\Gamma \models \delta$

Proposition

Un ensemble Γ est satisfiable si et seulement si tout sous-ensemble de Γ est satisfiable.

Démonstration

$\rightarrow$) Si Γ est satisfiable alors tout sous-ensemble de Γ est satisfiable.

Supposons qu'il existe un sous-ensemble Δ non vide de Γ tel que Δ soit non satisfiable. Chaque ligne du tableau de vérité des formules de Δ contiendrait au moins une case où la valeur de vérité d'une formule de Δ serait fausse. Γ serait dans ce cas non satisfiable.

En particulier $\emptyset$ est satisfiable (l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles).

$\leftarrow$) Si tout sous-ensemble de Γ est satisfiable alors Γ est satisfiable.

Si tous les sous-ensembles non vides de Γ sont satisfiables, il en est de même de Γ ($\Gamma \subseteq \Gamma$)

Proposition

Si $\Delta \models \beta$ et si $(\Delta \subseteq \Gamma)$ alors $\Gamma \models \beta$

Théorème de substitution

Soit β une formule où figure la variable propositionnelle P , et soit β' la formule obtenue à partir de β en substituant à P en toutes ces occurrences une formule α .

Si $\models \beta$ alors $\models \beta'$

De manière générale, soit β une formule où figure les variables propositionnelles $P_1, P_2 \dots P_m$ et β' la formule issue de β en substituant simultanément à toutes les occurrences de l'une ou de plusieurs des variables propositionnelles $P_1, P_2 \dots P_m$ les formules $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ respectivement. Alors :

Si $\models \beta$ alors $\models \beta'$

Théorème de remplacement

Soit α une formule dans laquelle apparaît en une ou plusieurs occurrences la formule β (α est de la forme : $\dots\beta\dots\beta\dots\beta\dots$). Soit α' la formule obtenue à partir de α en remplaçant β en une ou plusieurs de ces occurrences par une formule β' (α' est de la forme : $\dots\beta'\dots\beta'\dots\beta'\dots\beta'\dots$ on a remplacé ici la première et la deuxième occurrence de β par β'). Alors

Si $\models \beta' \leftrightarrow \beta$ alors $\models \alpha' \leftrightarrow \alpha$

Exemple

$\alpha : P_1 \vee (P_2 \rightarrow P_3) \leftrightarrow P_4 \vee (P_2 \rightarrow P_3)$

En remplaçant la première occurrence de $(P_2 \rightarrow P_3)$ par $(\neg P_2 \vee P_3)$ on obtient une formule α' logiquement équivalente à α telle que :

$\alpha' : P_1 \vee (\neg P_2 \vee P_3) \leftrightarrow P_4 \vee (P_2 \rightarrow P_3)$

Le tableau 2.7 présente la comparaison du théorème de substitution et du théorème de remplacement.

2.18 Raisonnement déductif en logique propositionnelle

2.18.1 Définition d'un système formel

Un système formel définit des règles de calcul entre formules qui simulent le raisonnement, ce qui permet de déduire de nouvelles formules. Il est défini par :

- Le langage et les formules sur ce langage.

Théorème de substitution	Théorème de remplacement
La substitution intéresse les tautologie	Le remplacement intéresse des formules quelcon
La substitution est appliquée à des variables propositionnelles	Le remplacement est appliqué à des formules
La substitution est appliquée à toutes les occurrences d'une même variable propositionnelle. de la même formule.	Le remplacement est appliqué à une ou plusieurs oc

TABLE 2.8 – Tableau de comparaison

- Les axiomes : formules ou schémas de formules supposées vraies.
- Les règles d'inférence : règles permettant de déduire une nouvelle formule.

2.18.2 Le théorème de complétude pour la logique booléenne

On introduit la notion de preuve par coupure en logique booléenne, et on établit le théorème de complétude affirmant que toute formule valide est prouvable à partir d'une famille finie explicite d'axiome simple.

Preuves par coupure « Démonstration à la Frege et Hilbert »

On introduit la notion de preuve par coupure (ou modus ponens).

LES AXIOMES

On prend trois schémas d'axiomes :

- A_1 : Pour toutes formules propositionnelles A, B
 $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
- A_2 : pour toutes formules propositionnelles A, B, C
 $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
- A_3 : pour toutes formules propositionnelles A, B
 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Une règle de déduction

Modus Ponens

pour toutes formules propositionnelles A, B :

Si on a A et $A \rightarrow B$, on peut déduire B .

Exemples 01

Preuve de : $A \rightarrow A$

$$\begin{aligned}
 f_0 &: A \rightarrow (A \rightarrow A) && A_1 \\
 f_1 &: (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)) && A_2 \\
 f_2 &: (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) && A_1 \\
 f_3 &: (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)) && MP(f_1, f_2) \\
 f_4 &: A \rightarrow A && MP(f_0, f_3)
 \end{aligned}$$

Exemples 02

Preuve de : $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow P)$

$$f_0 : P \rightarrow (Q \rightarrow P) \quad A_1$$

$$f_1 : (P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow P)) \quad A_2$$

$$f_2 : (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow P) \quad MP(f_0, f_1)$$

2.18.3 Méthode de résolution**Une règle de déduction****Théorème**

Le schéma suivant est bien une règle d'inférence :

$$\{X \vee A, \neg X \vee B\} \models A \vee B$$

Démonstration

De manière informelle, on peut dire la chose suivante : si on a X , alors on n'a pas $\neg X$, donc ayant $\neg X \vee B$, on a nécessairement B , donc $A \vee B$. De même si on a $\neg X$, on n'a pas X , donc ayant $X \vee A$, on a nécessairement A donc $A \vee B$. Dans les deux cas on a ainsi $A \vee B$, comme on est forcément dans un de ces deux cas, on a bien nécessairement $A \vee B$.

Ou bien aussi : noter que $(\neg X \vee B) \equiv (X \rightarrow B)$ et que $(A \vee X) \equiv (\neg A \rightarrow X)$, on a ainsi : $\{\neg A \rightarrow X, X \rightarrow B\}$, qui donne par règle du syllogisme : $\neg A \rightarrow B$, équivalent à $A \vee B$.

Proposition

La règle $\{\neg X, X\} \models \square$ est un cas particulier de la règle de résolution.
(avec A et B remplacés par $\square$).

Application de la règle de résolution à un ensemble de clauses**Clause**

Une disjonction de littéraux $(P \vee Q \vee \neg R, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R, p \vee Q, P, \neg P \dots etc.)$

Noter qu'une disjonction vide est, comme dans tous les cas similaires, l'élément neutre de la disjonction, à savoir : $\square$. C'est la raison pour laquelle on appellera souvent $\square$: **la clause vide**.

Résolvante de deux clauses

Soit deux clauses, S_1 et S_2 , telles que le littéral ℓ figure dans l'une et le littéral $\neg \ell$ figure dans l'autre (on écrira par exemple : $(\ell \in S_1, \neg \ell \in S_2)$, on appelle résolvante

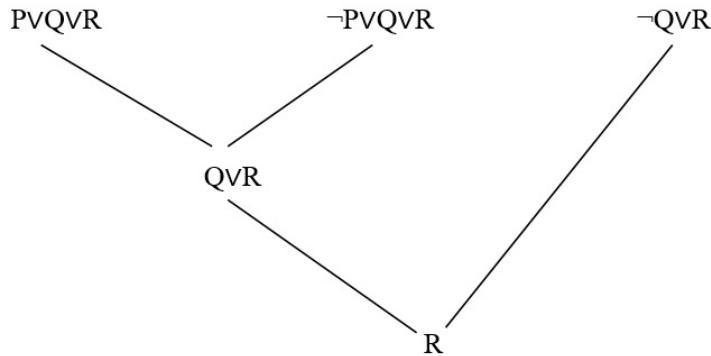
de S_1 et S_2 la clause obtenue en supprimant le littéral ℓ de l'une et le littéral $\neg\ell$ de l'autre et en réunissant tout ce qui reste en une seule clause.

Exemple

Si $S_1 = \neg P \vee Q \vee R$ et $S_2 = P \vee Q \vee S$, alors $Res(S_1, S_2) = Q \vee R \vee S$ (on supprimera aussi en même temps les littéraux redondants).

Exemple

$\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R\} \models R$



Résolution + réfutation

Partir d'un ensemble de clauses contenant la négation de la proposition à démontrer et appliquer la règle de résolution un certain nombre de fois, en enrichissant chaque fois l'ensemble de départ avec les déductions qui sont faites, jusqu'à obtenir $\square$ si possible.

Exemple

Ensemble de départ : $\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R\}$

1^{er} pas : $\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R, \neg Q\}$

2^{eme} pas : $\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R, \neg Q, Q \vee R\}$

3^{eme} pas : $\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R, \neg Q, Q \vee R, R\}$

4^{eme} pas : $\{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R, \neg Q, Q \vee R, R, \square\}$

Stop! On a trouvé $\square$.

Clauses de Horn

On peut avoir un algorithme ayant de meilleures qualités en se restreignant à une famille de clauses particulières appelées clauses de Horn.

littéral : un littéral est dit positif s'il consiste en une lettre (sans négation), il est dit négatif dans le cas contraire.

Clause de Horn : on appelle clause de Horn toute clause qui possède au plus un littéral positif.

Exemple de clause de Horn

$$\neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$R$$

$$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

Règle : on appellera règle, ou clause de Horn stricte, toute clause qui possède exactement un littéral positif, on appellera clause de Horn négative toute clause sans littéral positif, et on appellera fait, ou clause unitaire positive toute clause consistant en un littéral positif.

Algorithme de démonstration d'inconsistance d'un ensemble de clauses de Horn

Soit S l'ensemble de clauses

Tant que $\square \notin S$

- choisir p et c tels que :
 - P soit une clause unitaire positive de S .
 - C soit une clause de S contenant $\neg P$
- calculer la résolvante R de P et C
- remplacer S par $(S - \{C\}) \cup R$

S'il n'y a plus de nouveau choix possible et que $\square \notin S$, alors S est consistant.

Si $\square \in S$, alors S est inconsistent.

Exemple

$$S = \{P \vee \neg R \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

1^{er} pas : $\{P \vee \neg R \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ donne :

$$\{p \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

2^{eme} pas : $\{P \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ donne :

$$\{P \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

3^{eme} pas : $\{P \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ donne :

$$\{P \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

4^{eme} pas : $\{P \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ donne :

$$\{P, Q, R, T \vee \neg P, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

5^{eme} pas : $\{P, Q, R, T \vee \neg P, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$ donne :

$$\{P, Q, R, T, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}$$

par élimination des littéraux redondants :

$$\{P, Q, R, T, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}, \text{ qui donne :}$$

$$6^{\text{eme}} \text{ pas : } \{P, Q, R, T, \neg Q \vee \neg R\}$$

$$7^{\text{eme}} \text{ pas : } \{P, Q, R, T, \neg Q \vee \neg R\} \text{ donne :}$$

$$\{P, Q, R, T, \neg R\}$$

$$8^{\text{eme}} \text{ pas : } \{P, Q, R, T, \neg R\} \text{ donne :}$$

$\{P, Q, R, T, \square\}$

stop !

On a bien prouvé que l'ensemble était inconsistant.

Complexité de la recherche de modèles

Étant donné une formule avec n variables, il y a 2^n interprétations possibles. Par exemple, une formule à 100 variables possède 1267650600228229401496703205376 interprétations.

Si on essaye toutes les interprétations possibles, la complexité en temps sera donc exponentielle et les temps effectifs de calculs seront énormes (infaisables). Si on teste 1 milliard d'interprétations par seconde on en aura pour 40196936841331 années avec 100 variables.

Or on ne connaît pas, à l'heure actuelle, d'algorithme qui fournisse à coup sûr une réponse en temps non exponentiel. Et ce problème est aussi difficile que de nombreux autres pour lesquelles on ne connaît pas d'algorithme non exponentiel (on dit que ce problème est NP-complet).

Cependant, il existe des algorithmes, basés sur celui de **Davis-Putnam-Logemann-Loveland**, qui peuvent trouver une solution rapidement dans de nombreux cas, mais pas toujours .

Algorithme de Davis-Putnam-Logemann-Loveland

On considère une formule Ψ qui a été mise en FNC.

L'algorithme consiste essentiellement à :

1. Repérer les clauses littérales (une seule variable), fixer la valeur de la variable correspondante, mettre à jour les autres clauses.
2. Choisir un littéral k (au hasard ou à l'aide d'une heuristique).
3. Appliquer l'algorithme sur $\psi \wedge k$ et si on n'a pas trouvé de modèle, l'appliquer sur $\psi \wedge \neg k$
Si à un moment donné la formule n'est composée que de littéraux et qu'elle est consistante, on a trouvé un modèle. Si par contre on a généré une clause vide on est sûr de ne pas trouver de modèle.

Algorithme DPLL

Entrée : une formule F en FNC, un modèle partiel M .

Sortie : faux si on n'a pas trouvé de modèle, vrai si on a trouvé + le modèle.

Si F est vide :

Retourner vrai et M

Si F contient une clause vide :

Retourner faux

pour toute clause unitaire (x) ou $(\neg x)$ de F :

fixer $M(x) = v$ (resp. f)

$F = \text{PropagationValeur}(x, F)$

$K :=$ choisir un littéral de F

Retourner $\text{DPLL}(F \wedge K)$ ou sinon $\text{DPLL}(F \wedge \neg K)$

Propagation des valeurs

Si on a fixé $M(x) = v$

Supprimer toutes les clauses où x apparaît positivement

Enlever $\neg x$ de toutes les clauses où il apparaît

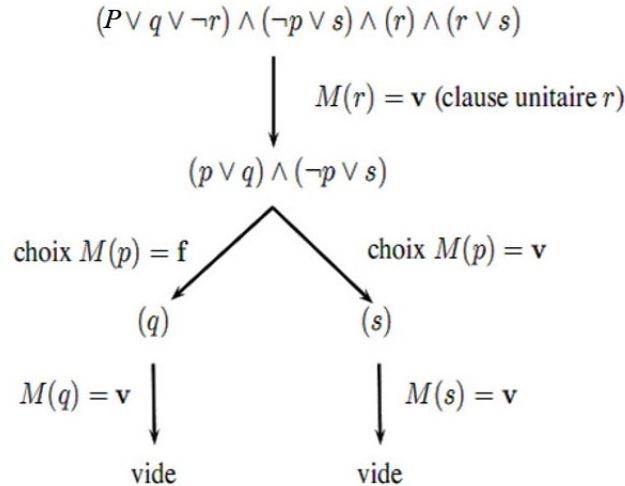
Si on a fixé $M(x) = f$

Supprimer toutes les clauses où $\neg x$ apparaît

Enlever x de toutes les clauses où il apparaît positivement

Exemple

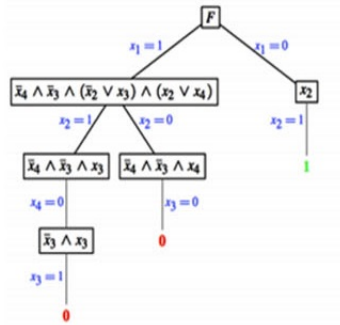
Exemple



Complétude et Correction

- Un système est **Complet** ssi $\models F$ implique $\vdash F$ (On peut démontrer toutes les tautologies).
- Un système est **Correcte** ssi $\vdash F$ implique $\models F$ (tous les théorèmes sont des tautologies).

$$F = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$



Déroulement de l'algorithme avec essais-erreurs ($\bar{x}$ signifie $\neg x$)

Théorie des modèle	Théorie de la démonstration
Interprétation sémantique sur un domaine	Interprétation syntaxique
Table de vérité des connecteurs et prédicats	Axiomes ,règle d'inférence
Tautologie	Théorème
Conséquence $\models$	Déduction $\vdash$

Conclusion

La logique propositionnelle permet essentiellement de discuter des connecteurs grammaticaux comme la négation, la conjonction et la disjonction, en composant des propositions à partir de propositions données. Ces connecteurs sont parfois appelés aristotéliens , car ils ont été mis en évidence par Aristote.

Le calcul propositionnel tient une grande place en informatique : ne serait-ce parce que nos ordinateurs actuels sont digitaux, et travaillent en binaire. Ce qui fait que nos processeurs sont essentiellement constitués de portes binaires du type de celles que l'on a étudié dans ce chapitre.

le calcul propositionnel reste très limité : par exemple, on ne peut pas écrire en calcul propositionnel l'existence d'un objet ayant une propriété donnée. Le calcul des prédicats, plus général, que nous étudierons dans le chapitre 3, permet lui d'exprimer des propriétés d'objets et des relations entre objets, et plus généralement de formaliser le raisonnement mathématique.

3.1 Introduction

Le calcul des prédicats est considéré comme une extension du calcul propositionnel qui offre la possibilité d'introduire en même temps que les variables propositionnelles d'autres variables appartenant à un domaine arbitraire (ensemble d'entiers, de réels ou d'objets quelconques). Cette extension est obtenue grâce à l'introduction des deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

3.2 Structure

Pour écrire un énoncé en logique du premier ordre, nous allons utiliser un ensemble de symboles plus riche qu'en logique des propositions. On se donne :

- Un ensemble (dénombrable) de constantes $\{a, b, c, \dots\}$.
- Un ensemble (dénombrable) de variables $\{x, y, z, \dots\}$.
- Un ensemble (dénombrable) de fonctions $\{f, g, h, \dots\}$.
- Un ensemble (dénombrable) de prédicats, ou relations $\{P, Q, \dots\}$.
- Des connecteurs logiques, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; ainsi que les parenthèses.
- Les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.

3.3 Terme

Les termes du calcul des prédicats sont définis comme suit :

- (a) Les variables et les constantes sont des termes.
- (b) Si f_i est une fonction à n arguments du calcul des prédicats. et $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont des termes alors $f_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un terme du calcul des prédicats.

- (c) L'ensemble des termes est engendré par les clauses (a) et (b).

Exemple

$x_i, f_1(x_i), g_2(x, f_1(x_i))$ sont des termes.

3.4 Formule atomique

Une formule atomique du calcul des prédicats est définie par :

Si P_i est un prédicat i.e une fonction définie d'un domaine D vers l'ensemble $\{0, 1\}$ et $t_1, t_2, \dots, t_n$ sont des termes alors $P_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est une formule atomique.

3.5 Formules bien formées

Les formules bien formées (ou formule tout simplement) sont définies par :

- Chaque formule atomique est une formule bien formée.
- Si F_1 et F_2 sont des formules bien formées du calcul des prédicats, alors $\neg F_1$; $F_1 \wedge F_2$; $F_1 \vee F_2$; $F_1 \rightarrow F_2$; $F_1 \leftrightarrow F_2$ sont aussi des formules bien formées.
- Si A, B sont des formules bien formées du calcul des prédicats. alors $:(\forall x)A$, et $(\exists x)A$ sont des formules bien formées.

Exemple

$$F = \forall x A(x) \rightarrow (\forall y ((f(x), 0) \rightarrow (P(g(y), b))))$$

$$G = (P(f(a), b)) \rightarrow \forall x ((\neg P(x, 0)) \wedge P(f(x), g(x, f(x))))$$

3.6 Variables libres et de variables liées

Dans la formule $(\forall x)A$ la formule A est dite champ du quantificateur . La variable x est dite variable quantifiée par le quantificateur universel . Les positions occupées par la variable x dans la formule A sont appelées occurrences de x . Dans la formule précédente F , la variable x possède deux occurrences.

Une occurrence d'une variable x dans une formule est dite liée si elle possède une occurrence dans le champ d'un quantificateur $\forall$ (ou $\exists$) dans cette formule. Si une occurrence d'une variable n'est pas liée, elle est libre.

Exemple

$$F = \forall x A(x) \rightarrow (\forall y ((f(x), 0) \rightarrow (P(g(y), b))))$$

La première occurrence de la variable x est liée par le quantificateur $\forall x$, mais la deuxième occurrence de la variable x est libre.

Une variable est libre si toutes ses occurrences sont libres, une variable est liée si elle a au moins une occurrence liée.

3.7 Formules équivalentes

Soit F une formule. On a les équivalences suivantes :

$$\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$$\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$$

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Proposition

Supposons que la variable x n'est pas libre dans la formule G . Soit F une formule. On a alors les équivalences suivantes :

$$\forall x G \equiv \exists x G \equiv G$$

$$(\forall x F \vee G) \equiv \forall x (F \vee G)$$

$$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$(\exists x F \vee G) \equiv \exists x (F \vee G)$$

$$(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$(G \wedge \forall x F) \equiv \forall x (G \wedge F)$$

$$(G \vee \forall x F) \equiv \forall x (G \vee F)$$

$$(G \wedge \exists x F) \equiv \exists x (G \wedge F)$$

$$(G \vee \exists x F) \equiv \exists x (G \vee F)$$

$$(\forall x F \rightarrow G) \equiv \exists x (F \rightarrow G)$$

$$(\exists x F \rightarrow G) \equiv \forall x (F \rightarrow G)$$

$$(G \rightarrow \forall x F) \equiv \forall x (G \rightarrow F)$$

$$(G \rightarrow \exists x F) \equiv \exists x (G \rightarrow F)$$

3.8 Sémantique de la logique des prédicats du premier ordre

En calcul propositionnel, il existe des moyens algorithmiques (le tableau de vérité par exemple) permettant de déterminer si une formule est satisfiable ou est une tautologie. En calcul des prédicats, nous ne pouvons pas dire d'une formule qu'elle est vraie ou fausse si nous ne connaissons pas la signification de chacun des symboles qui apparaissent dans la formule. Ainsi, la valeur de vérité de la formule $\alpha : \forall x \exists y P(x, y)$ est vraie, si nous interprétons le symbole de prédicat P comme ' $<$ ' avec x et y prenant leurs valeurs dans N . La valeur de vérité de α serait fausse si nous interprétons

P comme ‘ $>$ ’.

L’étude sémantique des formules d’un langage du premier ordre est donc subordonnée à une *interprétation* des symboles du langage et à la définition d’un domaine (non vide) appelé domaine d’interprétation du langage.

3.9 Interprétation de formules d’un langage du premier ordre

Définition

Étant donné L un langage du premier ordre, une interprétation I sur ce langage est une fonction de domaine D non vide qui assigne :

- à chaque symbole de prédicat P à n arguments, une relation n -aire $I(P) : D^n \rightarrow \{V, F\}$
- à chaque symbole de fonction f à n arguments ($n > 0$) une opération sur les éléments du domaine de l’interprétation $I(f) : D^n \rightarrow D$.
- à chaque symbole de constante a_i un élément $I(a_i) = d_i$ appartenant à D .

Définition

Étant donné L un langage du premier ordre et une interprétation I de domaine D sur ce langage, on appelle valuation une fonction $v : Var \rightarrow D$ qui associe à chaque variable de L un élément de D .

3.9.1 Interprétation d’un terme

L’interprétation d’un terme a pour but d’associer un élément du domaine d’interprétation à ce terme. On désigne par $I(t)_v$ l’élément de D associé au terme t par l’interprétation I de domaine D et la valuation v sur D . Cet élément est défini comme suit :

- Si $t = c$ alors $I(t)_v = I(c)_v = I(c) = d_i \in D$; (c est un symbole de constante).
- Si $t = x_i$ alors $I(t)_v = I(x_i)_v = v(x_i) = d_i \in D$; (x_i est un symbole de variable).
- Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ alors $I(t)_v = I(f(t_1, \dots, t_n))_v = I(f)(I(t_1)_v, \dots, I(t_n)_v) = d_i \in D$; (f est un symbole de fonction et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes).

Exemple

L’interprétation I de domaine $D = \mathbb{N}$ telle que : $I(f) = " * "$; $I(g) = " + "$; $I(a) = 0$; $v(x) = 2$; $v(y) = 3$, associe au terme $f(g(x, a), y)$ l’élément suivant :

$$I(f(g(x, a), y))_v = I(f)(I(g(x, a))_v, v(y)) = I(f)[I(g)(v(x), I(a)), v(y)] = *[+(2, 0), 3] = 6.$$

3.9.2 Interprétation d'une formule

Étant donné une interprétation I de domaine D et une valuation v , l'interprétation $I(\alpha)_v$ d'une formule α du premier ordre est définie comme suit :

- α est une formule atomique :
 $I(P(t_1, \dots, t_n))_v = I(P)((I(t_1)_v, \dots, I(t_n)_v).$
- $\alpha = \neg\beta$:
 $I(\alpha)_v = I(\neg\beta)_v = I(\neg)I(\beta)_v = \text{non}I(\beta)_v.$
- $\alpha = \beta_1 \circ \beta_2$ avec $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
 $I(\alpha)_v = I(\beta_1 \circ \beta_2)_v = I(\beta_1)_v I(\circ)I(\beta_2)_v$
- α est de la forme $Qx\beta$ ($Q \in \{\forall, \exists\}$)
 $I(\forall x\beta)_v = I(\beta)_{v[x=d]}$ pour tout $d \in D$.
 $I(\exists x\beta)_v = I(\beta)_{v[x=d]}$ pour au moins $d \in D$.

L'interprétation usuelle des connecteurs logiques est la suivante :

$$\begin{aligned}
 I(\beta_1 \wedge \beta_2)_v &= I(\beta_1)_v I(\wedge)I(\beta_2)_v = I(\beta_1)_v \text{ et } I(\beta_2)_v \\
 I(\beta_1 \vee \beta_2)_v &= I(\beta_1)_v I(\vee)I(\beta_2)_v = I(\beta_1)_v \text{ ou } I(\beta_2)_v \\
 I(\beta_1 \rightarrow \beta_2)_v &= I(\beta_1)_v I(\rightarrow)I(\beta_2)_v = \text{si } I(\beta_1)_v \text{ alors } I(\beta_2)_v \\
 I(\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)_v &= I(\beta_1)_v I(\leftrightarrow)I(\beta_2)_v = I(\beta_1)_v \text{ si et seulement si } I(\beta_2)_v
 \end{aligned}$$

3.9.3 Satisfiabilité d'une formule

Définition

Étant donné L un langage du premier ordre et I une interprétation de domaine D_I sur ce langage, une valuation v satisfait une formule α appartenant à L , si après substitution de l'élément du domaine de I associé par v aux variables libres de α , on obtient une proposition vraie. On note :

$$I \models \alpha_v$$

Proposition

$$I \not\models \alpha_v \quad \text{si et seulement si} \quad I \models \neg\alpha_v$$

Démonstration

$I \not\models \alpha_v$ (v ne satisfait pas α pour l'interprétation I : $I(\alpha)_v = F$)ssi non $I(\alpha)_v = v$, c'est à dire :

$$I(\neg\alpha)_v = V(I \models \neg\alpha_v).$$

Exemple

Considérons la formule atomique $\alpha : P(x, y)$ et l'interprétation I de domaine $D = \{3, 5, 7\}$ telle que $I(P) = ">"$. La valuation v telle que $v(x) = 5$ et $v(y) = 3$ satisfait α pour I . On a en effet :

$$\begin{aligned} I(\alpha)_v &= I(P(x, y))_v \\ &= I(P)(v(x), v(y)) \\ &= > (5, 3) \end{aligned}$$

La valeur de vérité de la proposition $> (5, 3)$ étant V, nous écrivons $I \models P(x, y)_{v(x=5, y=3)}$. A l'opposé, la valeur de vérité de $I(\alpha)_{v'(x=3, y=5)}$ est faux. Par conséquent la valeur de vérité de $I(\neg\alpha)_{v'}$ est V. Nous écrivons $I \models \neg P(x, y)_{v'(x=3, y=5)}$.

Pour une formule atomique $P(t_1, \dots, t_n)$ on a :

$$I \models P(t_1, \dots, t_n)_v \text{ si et seulement si } (I(t_1)_v, \dots, I(t_n)_v) \in I(P)$$

Ainsi, dans le cas de l'exemple, on a $(5, 3) \in I(P)$. Il en est de même pour les couplets $(7, 3)$ et $(7, 5)$. A l'opposé, $(5, 7) \notin I(P)$, donc $(5, 7) \in \text{non } I(P)$.

Exemple

Considérons la formule atomique $\beta : P(f(x, y), y)$ et l'interprétation I de domaine $D = N$ telle que $I(P) = ">"$; $I(f) = "-"$. La valuation $v(x = 4, y = 1)$ satisfait β pour I . On a en effet :

$$\begin{aligned} I(\beta)_v &= I(P(f(x, y), y))_v \\ &= I(P)(I(f)(v(x), v(y)), v(y)) \\ &= > (- (4, 1), 1) = > (3, 1). \end{aligned}$$

La valeur de vérité de la proposition $> (3, 1)$ étant V, nous écrivons $I \models P(f(x, y), y)_{v(x=4, y=1)}$. A l'opposé, la valuation v' telle que $v'(x = 4, y = 3)$ ne satisfait pas β pour I . Par conséquent la valeur de vérité de $I(\neg\beta)_{v'}$ est V. Nous écrivons $I \models \neg P(f(x, y), y)_{v'(x=4, y=3)}$.

Exemple

$$\gamma : \exists x P(x) \rightarrow P(x).$$

On remarque que la première occurrence de x est liée et la deuxième est libre. Considérons l'interprétation I de domaine $D_I = N$ telle que $I(P) = \text{".....est pair"}$ et la valuation v telle que $v(x) = d' \in D_I$.

$$\begin{aligned} I(\gamma)_{v(x=d')} &= \text{si } I(\exists x P(x))_v \text{ alors } I(P(x))_{v(x=d')} \\ &= \text{si } I(P(x))_{v(x=d')} \text{ pour au moins un } d' \in D_I \text{ alors } I(P(x))_{x=d'} \\ &= \text{si } I(P)(d) \text{ pour au moins un } d \in D_I \text{ alors } I(P)(d'). \end{aligned}$$

La partie gauche de l'implication $I(P)(d)$ pour au moins un $d \in D_I$ est vraie pour I . Par conséquent, toute valuation qui associe à x un élément d' pair satisfait γ pour l'interprétation I .

Définition

On dira d'une formule α qu'elle est satisfiable, s'il existe une interprétation I qui satisfait α pour au moins une valuation v . Les formules α, β, γ des exemples précédents

sont satisfiables.

Exemple

Considérons la formule $\beta = D(x, y)$ et l'interprétation I de domaine $D = \{2, 3, 6\}$ telle que $I(D) = \text{"...est diviseur de ..."}$. Le tableau 3.1 montre les valeurs de D assignées à x et à y par chacune des 9 fonctions de valuation que l'on peut envisager.

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
x	2	2	2	3	3	3	6	6	6
y	2	3	6	2	3	6	2	3	6
$D(x,y)$	V	F	V	F	V	V	F	F	V

TABLE 3.1 – Tableau de la formule β .

La quatrième ligne du tableau indique les valeurs de vérité de $D(x, y)_v$ pour chacune des valuations. Les valuations représentées en gras sont celles qui satisfont la relation " x est diviseur de y " : $I \models D(x, y)_{v1}$, $I \models D(x, y)_{v3}$, $I \models D(x, y)_{v5}$, $I \models D(x, y)_{v6}$, $I \models D(x, y)_{v9}$.

3.9.4 Modèle d'une formule

On dit que l'interprétation I est un modèle de la formule α , si toute valuation satisfait α pour l'interprétation I . On note $I \models \alpha$.

Exemple

$\alpha = P(x, y)$, $I(P) = \text{"...diviseur de ..."}$, $D = \{1, 2\}$ On dit que α est satisfiable mais

	v1	v2	v3	v4
x	1	1	2	2
y	1	2	1	2
α	V	V	F	V

I n'est pas modèle de α .

Exemple

$D = \{2, 6\}$, $I(P) = \text{"...diviseur de ..."}$, $I(Q) = \text{"...multiple de..."}$.

$\alpha = \forall x P(x, y)$, $\beta = \forall x \exists y Q(x, y)$.

	v1	v2	v3	v4
x	2	2	6	6
y	2	6	2	6
$P(x, y)$	V	V	F	V
$Q(x, y)$	V	F	V	V

$I \not\models \alpha$ $I \models \beta$

On dit que l'interprétation I est un modèle de l'ensemble Γ , si toute valuation satisfait Γ pour l'interprétation I . On note $I \models \Gamma$.

3.9.5 Validité d'une formule

Une formule α est valide si elle est vraie pour toute interprétation I , et toute valuation v . On note $\models \alpha$.

Exemple

$$\beta = \neg P(x) \vee P(x)$$

Pour démontrer qu'une formule n'est pas valide, il suffit de trouver une interprétation et/ou une évaluation pour lesquelles la formule est fausse.

3.9.6 Conséquence logique

On dit que β est conséquence logique de Γ (on note $\Gamma \models \beta$), ssi pour toute interprétation I et toute valuation v , on a :

$$\text{Si } I \models \Gamma_v \text{ alors } I \models \beta_v$$

Exemple

$$\forall x(\alpha \rightarrow \beta), \forall x\alpha \models \forall x\beta.$$

Conclusion

Le calcul des prédicats (ou Logique du Premier Ordre) permet d'exprimer de telles relations entre individus, il est donc bien plus riche que le calcul propositionnel. En premier lieu, il contient des individus (ou entités). Il contient des fonctions permettant de transformer des entités en autres entités (par exemple la fonction qui associe une personne à son père), et des relations permettant de lier les individus entre eux. Les relations appliquées aux entités peuvent être évaluées à vrai ou faux (selon les valeurs attribuées aux entités, aux fonctions et aux relations) et servent de briques de base à un langage du premier ordre obtenu à l'aide des connecteurs logiques du calcul propositionnel et de deux autres connecteurs appelés quantificateurs.

Le calcul des prédicats est donc très similaire à celui des propositions. On aura des formules définies inductivement à partir des symboles de prédicats et de fonctions. On les interprétera dans divers mondes possibles et alors elles deviendront vraies ou fausses. On aura également un système formel correct et complet pour démontrer ou réfuter des formules.

Il y a néanmoins une différence algorithmique importante : le calcul des prédicat est indécidable : il est absolument impossible de vérifier qu'une formule est vraie pour

toute interprétation. Ceci vient du fait que les interprétations comportent en général une infinité d'individus, il est alors difficile de vérifier que $\forall x F$ puisque x peut prendre une infinité de valeurs différentes.

Exercice 1 : Rappel sur l'algèbre de Boole

- Donnez la table de vérité des formules suivantes :
 $b \rightarrow (a \wedge b); p \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)).$
- a et b sont des variables booléennes. Déterminez les valeurs booléennes des égalités suivantes :
 $a + 0 =$
 $a + 1 =$
 $a + \bar{a} =$
 $a + a =$
 $\bar{\bar{a}} =$

Exercice 2 : Modélisation

Formuler en logique des propositions les énoncés suivants :

- Personne n'a ri, ou même souri.
- Continue comme ça, et tu vas t'en prendre une.
- S'il boit du citron, il pleure, ou au contraire il est heureux et il chante.
- Qui vole un œuf vole un œuf.
- Il écoute de la musique triste sans bailler.

Exercice 3

On considère les énoncés suivants, où p, q, r, s, t sont des symboles propositionnels. Les écrire comme des formules du calcul propositionnel :

- A : Si p alors q
- B : Pour que p il suffit que q
- C : Pour que p il faut que q
- D : p est une conséquence de q
- E : Soit p , soit q , mais pas les deux
- F : Si p alors q sinon r
- G : Si p alors q a moins que r
- H : Si p alors q sauf si r
- K : Si p alors si q alors r sinon s
- L : Si p alors si q alors r sinon s sinon t

Exercice 4

Soient a ; b deux entiers naturels.

1. Donner un équivalent de $(a < b) \rightarrow (a = b)$
2. Donner la négation de $(a \preceq b) \rightarrow (a > b)$

Exercice 5

Soit la formule : $F = (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

Montrer que F est tautologie en utilisant :

1. La table de vérité.
2. Les formules équivalentes.

Exercice 1

Soient F, G, H trois formules propositionnelles. Peut-on déduire $F \rightarrow H$ à partir de $\{F \rightarrow G, G \rightarrow H\}$

Exercice 2

- I. Formuler en logique des propositions les énoncés suivants :
 1. les gens qui ont la rougeole doivent prendre le médicament X.
 2. les gens qui ont de la fièvre et des points rouges au fond de la gorge ont la rougeole.
 3. ceux pour qui la température est au-dessus de 38° sont considérés comme ayant de la fièvre.
- II. On se basant sur cet énoncés, et sachant que Ahmed a des points rouges au fond de la gorge et a une température de $39^\circ 5$.
Peut-on donner le médicament X à Ahmed ?
Nb : utiliser la règle de Modus Ponens (mp) et (la règle d'introduction de $\wedge$:
 $\{A, B\} \models A \wedge B$

Exercice 3

Démontrer, en logique des propositions, les formules suivantes :

1. $A \rightarrow A$

2. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow B)$
4. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
5. $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow C$
6. $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow A \rightarrow C)$

Exercice 4

Les formules suivantes, sont-elles des tautologies, et sinon donner une interprétation modèle pour la négation de chaque une d'elles :

1. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B)) \rightarrow C$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (A \wedge (B \rightarrow C))$
3. $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee D))$
4. $(A \vee B) \rightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C)$
5. $(A \vee B) \rightarrow ((\neg A \vee \neg B) \rightarrow C)$

Montrer que ces formules sont des tautologies :

1. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
2. $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
3. $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))))$

Y'a-t-il un modèle pour l'ensemble $\Delta = \{(A \rightarrow B), (B \vee D) \rightarrow \neg A, \neg B \wedge C, B \wedge \neg B\}$.

Exercice 5

Une formule est dite contingente lorsqu'elle est satisfaisable et non valide. Dire si les formules suivantes sont valides, insatisfiables ou contingentes :

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$

Exercice 6

Dans cet exercice, A et B sont des formules propositionnelles quelconques et Σ désigne un ensemble de formules propositionnelles.

1. Rappeler la définition de $\Sigma \models B$.
2. Démontrer le lemme suivant :
 $\Sigma \models A \wedge B$ si et seulement si $\Sigma \models A$ et $\Sigma \models B$

Exercice 7

Soit l'énoncé suivant :

- S'il fait froid alors il neige et Amine est malade.
- Il fait froid.
- Si Amine est malade alors il ne travaille pas

1. Formaliser ces trois phrases en calcul propositionnel ?
2. Montrer que : « Amine ne travaille pas et il neige » par :
 - a) Méthode de résolution et réfutation.
 - b) Méthode des axiomes.

Exercice 8

Vous êtes perdus sur une piste dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation. Chacune des deux pistes est gardée par un gardien que vous pouvez interroger. Les pistes peuvent soit conduire à une oasis, soit se perdre dans le désert profond (au mieux, elles conduisent toutes à une oasis, au pire elles se perdent toutes les deux).

A. Le gardien de droite vous répond : « Une au moins des deux pistes conduit à une oasis. »

B. Le gardien de gauche vous répond : « La piste de droit perd dans le désert. »

Vous savez que les gardiens disent tous les deux la vérité ou bien mentent tous les deux.

Trouvez la route qui conduit à une oasis par la méthode de résolution.

Exercice 1

Pour chacune des paires de phrases suivantes, déterminez si les phrases sont logiquement équivalentes ou non :

1. $(p \rightarrow q \vee r)$ et $(p \wedge q \rightarrow r)$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ et $(p \wedge q \rightarrow r)$
3. $(p \wedge q \rightarrow r)$ et $(p \wedge r \rightarrow q)$
4. $((p \rightarrow q \vee r) \wedge (p \rightarrow r))$ et $(q \rightarrow r)$
5. $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r))$ et $(p \vee \neg p)$
6. Quelques plombiers ne sont pas riches.

Exercice 2

Convertissez les phrases suivantes à la forme clause.

1. $p \wedge q \rightarrow r \vee s$
2. $p \vee q \rightarrow r \vee s$
3. $\neg(p \vee q \vee r)$
4. $\neg(p \wedge q \wedge r)$
5. $p \wedge q \leftrightarrow r$

Exercice 3

Quels sont les résultats de l'application de la résolution propositionnelle aux paires de clauses suivantes

1. $\{p, q, \neg r\}$ et $\{r, s\}$
2. $\{p, q, r\}$ et $\{r, \neg s, \neg t\}$
3. $\{q, \neg q\}$ et $\{q, \neg q\}$
4. $\{\neg p, q, r\}$ et $\{p, \neg q, \neg r\}$

Exercice 4

Montrer en utilisant la résolution que la formule suivante est une tautologie :
 $((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p) \rightarrow s$

Exercice 5

Montrer à l'aide de la résolution que la formule :

$$G = q \rightarrow (p \rightarrow (\neg s \vee t))$$

est une conséquence logique de la formule :

$$F = (\neg p \wedge (r \rightarrow \neg s)) \vee ((q \rightarrow (r \vee t)) \wedge (s \rightarrow \neg r))$$

Exercice 1

Traduisez les phrases suivantes dans le langage de prédicats. Conservez autant de structure que possible. Utilisez les traductions suivantes pour les prédicats :

$P(x)$	$:x$ est un plombier
$H(x)$	$:x$ est un homme
$R(x)$	x : est riche

1. Tous les plombiers sont des hommes.
2. Ahmed est riche.
3. Si Ahmed est un plombier, Ahmed est riche.
4. Tous les hommes sont plombiers ou riches.
5. Quelques plombiers sont riches.
6. Quelques plombiers ne sont pas riches.
7. Aucun plombier n'est riche.
8. Tous les hommes sont plombiers.
9. Tous les hommes ne sont pas plombiers.

Exercice 2

soient les formules du calcul des prédicats du 1^{er} ordre suivantes :

1. $P(x, y) \rightarrow \neg Q(a, f(g(x), a))$
2. $R(h(x, b, f(w)) \rightarrow \neg(R(a, b, x) \rightarrow P(w, g(x))))$

Déterminer les variables, les constantes, les termes, et les atomes.

Exercice 3

Soit la situation suivante :

Il y a quatre individus :Amina ,Brahim,Chamseddine,Dalila.

Amina et Dalila sont des filles ;Brahim et Chamseddine sont des garçons.

Amina et Brahim ont chacun un chat,Chamseddine et Dalila ont chacun un chien.

Amina lit.

Brahim,Chamseddine et dalila mangent.

Note :ce qui n'est pas précisé est faux,par exemple : Amina ne mange pas.

1.Décrivez le modèle M correspond à cette situation.

2.Formalisez les phrases ci-dessous dans le langage des prédicats .Pour chacune des formules correspondantes,dites si elle est vraie ou fausse dans le modèle M .

1. Amina mange ou lit.
2. Si Brahim mange,Chamseddine lit.
3. Si Brahim et Chamseddine mangent, alors Dalila ne lit pas.
4. Dalila a un chat ou un chien.
5. Tout le monde a un chat ou un chien.

- [1] Roberts, C. (2009). Introduction to mathematical proofs : a transition (Vol. 26). CRC Press.
- [2] Duparc, J. (2015). La logique pas à pas. PPUR Presses polytechniques.
- [3] Introduction A La Logique Mathématique. Dr. BENKADDOUR Fatima Zohra. Support destiné aux étudiants de la 1ère année PES (Professeur d'Enseignement Secondaire) informatique, Licence Mathématique et Informatique (MI). Année universitaire 2018-2019.
- [4] Goranko, V. (2016). Logic as a tool : a guide to formal logical reasoning. John Wiley & Sons.
- [5] Rosen, K. H. (2007). Discrete mathematics and its applications. The McGraw Hill Companies,.